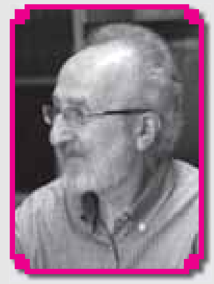
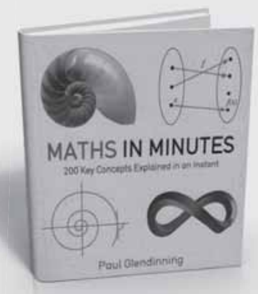
تألیف: **پال گلندینینگ**
مترجم: **غلامرضاَ یاسی‌پور**



ریاضیات در چند دقیقه



اصلیّت و شمارش‌پذیری

«اصلیّـت» (cardinality) یک مجموعهٔ متناهی مثل A که با |A| نوشــته می‌شــود، تعداد اعضای متمایز آن اســت. دو مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی را دارای یک اصلیت می‌گوییم، اگر اعضای آن‌ها را بتوان در «تناظر یک‌به‌یک» (one to-one correspondence) قرار داد. این بدان معنی است که هر عضو هر مجموعه را می‌توان دقیقاً با یک عضو مجموعهٔ دیگری جفت کرد.

«مجموعه‌های شــمارا» (countable sets) مجموعه‌هایی هستند که اعضای آن‌ها را بتوان با اعداد طبیعی برچســب زد. این به‌طور شهودی یعنی اینکه اعضای مجموعه را می‌توان فهرست کرد، هر چند که این فهرست نامتناهی باشــد. از لحاظ ریاضی، این مطلب به این معنی اســت که مجموعه را می‌توان در تناظری یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی قرار داد.

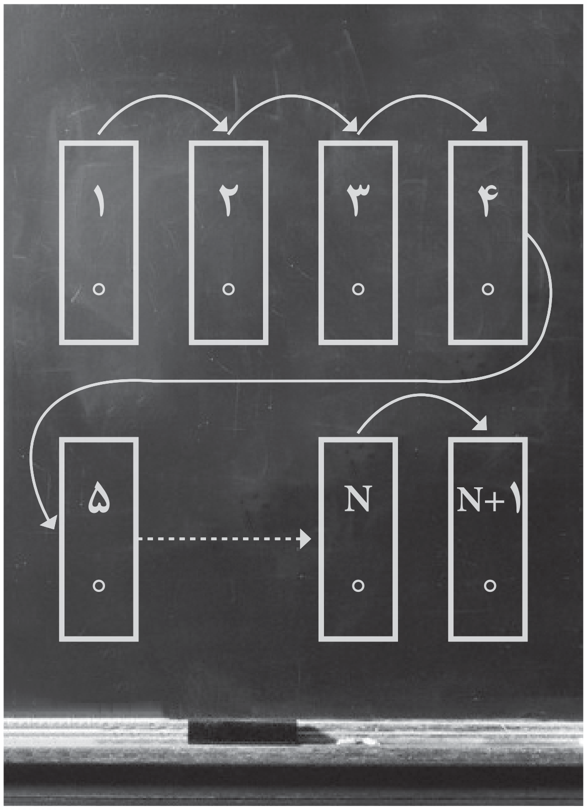
ایــن کار پیامدهــای شــگفت‌انگیزی دارد. به‌عنوان نمونه، یک زیرمجموعهٔ اکید یک مجموعهٔ شــمارا می‌تواند دارای همان اصلیت خود آن مجموعه باشــد. بنابراین، مجموعــهٔ جمیع اعــداد زوج دارای همان اصلیت مجموعهٔ اعداد مربع است که همان اصلیتی را دارد که اعداد طبیعی دارند. گفته می‌شود که جمیع آن‌ها «*شمارا ـ نامتناهی*» (countably infinite) هستند.

هتل هیلبرت

«هتل هیلبرت» تمثیلی است که توسط **دیوید هیلبرت** (David Hilbert) ریاضی‌دان، به‌خاطر مجسم کردن مفهوم شگفت نامتناهی‌های شمارا، اختراع شده است. این هتل موهومی مجموعهٔ نامتناهی شمارایی از اتاق‌هایی دارد که با اعداد ۱، ۲، ۳ و... شماره‌گذاری شده‌اند و زمانی که دیرهنگام یک متقاضیِ اتاق وارد می‌شود، کاملاً اشغال شده است.

متصدی پذیرش پس از اندکی اندیشه از میکروفن متصل به اتاق‌ها از هر یک از مهمان‌ها خواهش می‌کند که به‌ترتیب شمارهٔ اتاق‌ها به اتاق پهلویی نقل مکان کنند. بنابراین، فردی که اتاق شمارهٔ ۱ را گرفته به اتاق شمارهٔ ۲ می‌رود، شخص اتاق شمارهٔ ۲ به اتاق شمارهٔ ۳، و به‌همین ترتیب، همه نقل مکان می‌کنند. یعنی برای هر یک از مهمان‌های شمارا نامتناهی واقع در اتاق N، همواره اتاق شمارهٔ N+۱ی موجود است تا به آن نقل مکان کند. در این صورت، زمانی که همهٔ مهمان‌ها نقل مکان کرده باشند، اتاق شمارهٔ ۱ برای اسکان مهمان جدید خالی شده است.

هتل هیلبرت نشان می‌دهد که نتیجهٔ افزودن یک عضو به یک مجموعهٔ شمارا نامتناهی، همچنان مجموعه‌ای شمارا نامتناهی است. بنابراین باید نامتناهی‌های شمارای مختلفی موجود باشند.



شمارش اعداد گویا

اگرچه جمیع مجموعه‌های نامتناهی شمارا نیستند، لیکن بعضی از مجموعه‌های بسیار بزرگ شمارا هستند. این مجموعه‌ها شامل اعداد گویا هستند؛ یعنی اعدادی که از نسبت دو عدد صحیح $\frac{a}{b}$ ساخته شده‌اند. این موضوع را می‌توان تنها با بررسی اعداد گویای بین ۰ و ۱ به اثبات رساند.

اگر اعداد گویای بین ۰ و ۱ شمارا باشند، در این صورت باید بتوانیم آن‌ها را در ترتیبی قرار دهیم که فهرستی کامل ـ اگرچه نامتناهی ـ به‌وجود آورد. در این مورد ترتیب طبیعی صعودی اندازه به‌کار نمی‌آید؛ زیرا بین هر دو عدد گویا همواره می‌توان عدد دیگری یافت. بنابراین نمی‌توانیم حتی اعضای اول و دوم چنین فهرستی را بنویسیم. اما آیا راه دیگری برای فهرست کردن این اعداد وجود دارد؟

یک راه‌حل، همان‌گونه که در شکل نشان داده‌ایم، این است که اعداد را ابتدا توسط مخرجشان، یعنی b، و سپس توسط صورتشان، یعنی a، مرتب کنیم. البته در این رهیافت پاره‌ای تکرار وجود دارد، اما هر عدد گویای بین ۰ و ۱ دست‌کم یک‌بار در فهرستمان ظاهر می‌شود.

۱/۲

۱/۳ , ۲/۳ ,

۱/۴ , ۲/۴ , ۳/۴ ,

۱/۵ , ۲/۵ , ۳/۵ , ۴/۵ ,

۱/۶ , ۲/۶ , ۳/۶ , ۴/۶ , ۵/۶

– –

۱/n , ۲/n , ۳/n , ۴/n , ..., (n-۲)/n , (n-۱)/n